

Μάθημα: Στατική ΙΙ
Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

6 Οκτωβρίου 2011
Διάρκεια εξέτασης 2:15

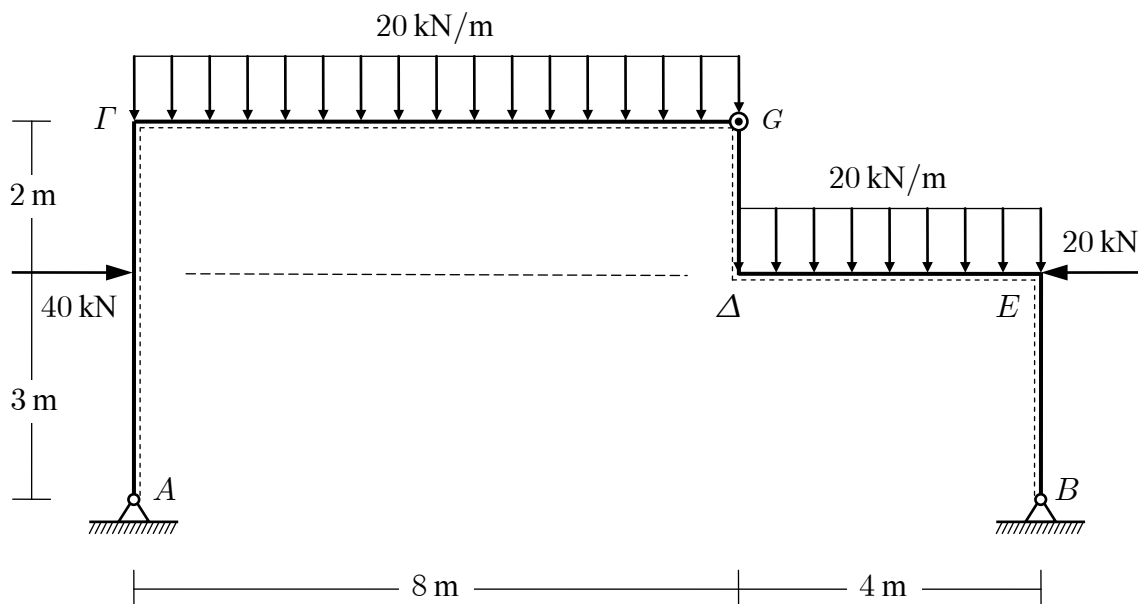
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

(2^η περίοδος εαρινού εξαμήνου 2010-11)

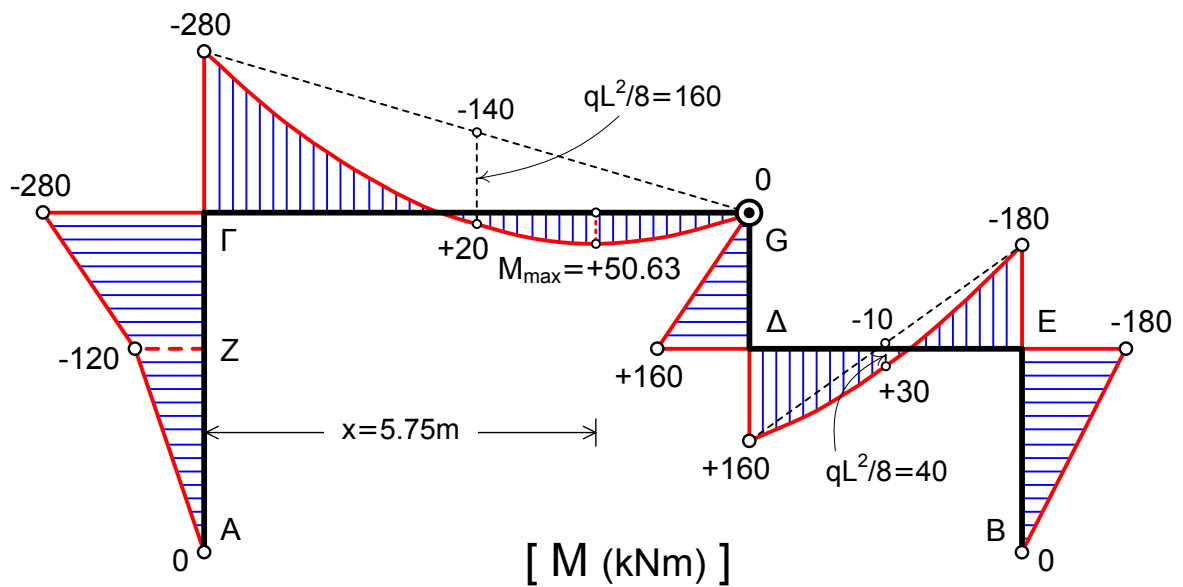
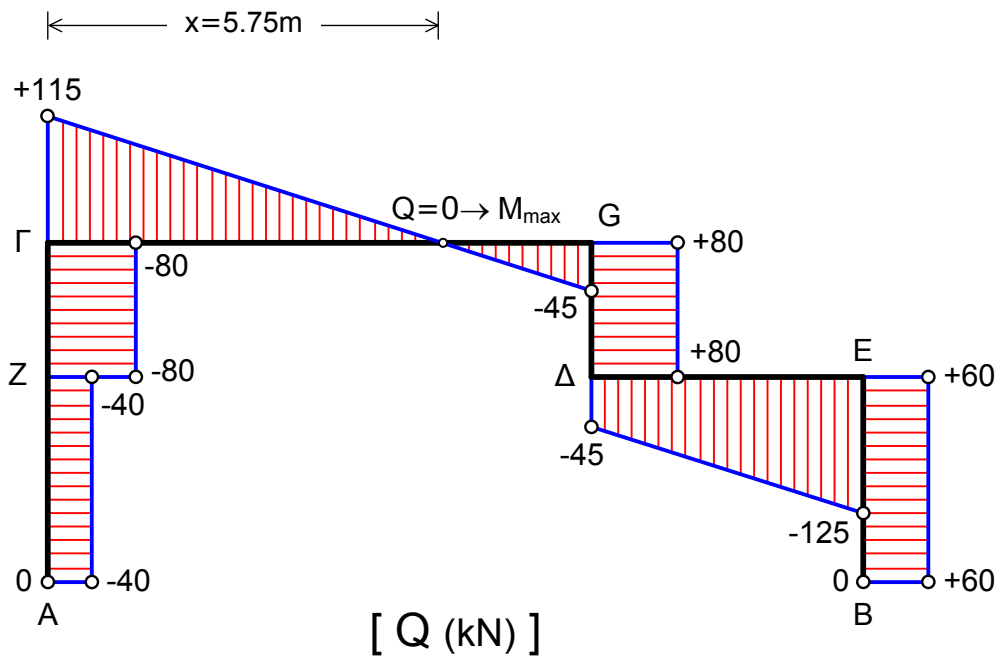
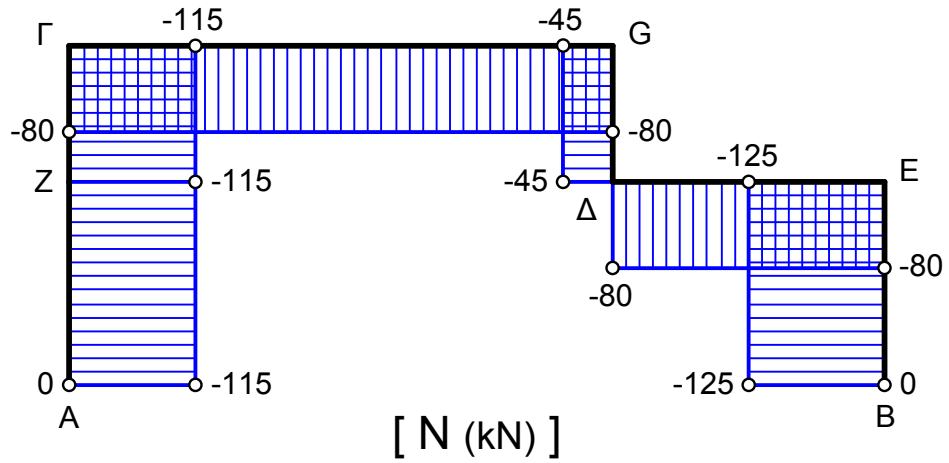
ΘΕΜΑ 1^ο (35%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής στο ζύγωμα FG .



Επίλυση:

Αντιδράσεις: $A_x = 40 \text{ kN}$, $A_y = 115 \text{ kN}$, $B_x = -60 \text{ kN}$ και $B_y = 125 \text{ kN}$



Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η μέγιστη ροπή θα εμφανισθεί σε σημείο κάτω από το κατανεμημένο φορτίο όπου η τέμνουσα μηδενίζεται. Αυτό σύμφωνα με το διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων θα συμβεί δεξιά του σημείου Γ σε απόσταση x , η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x = \frac{115 \text{ kN}}{20 \text{ kN/m}} = 5.75 \text{ m}$$

Η δε τιμή της μέγιστης ροπής στο σημείο αυτό μπορεί να προκύψει με δύο τρόπους:

(α) Γίνεται τομή στο σημείο αυτό και υπολογίζεται η ροπή από το τμήμα αριστερά της τομής, που είναι προς το σημείο A :

$$\begin{aligned} M_{\max} &= 5.75 \text{ m} \cdot A_y - 5 \text{ m} \cdot A_x - 2 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} - (20 \text{ kN/m} \cdot 5.75 \text{ m}) \cdot \frac{5.75 \text{ m}}{2} \\ &= 5.75 \text{ m} \cdot 115 \text{ kN} - 5 \text{ m} \cdot 40 \text{ kN} - 80 \text{ kNm} - 330.625 \text{ kNm} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$M_{\max} = 661.25 \text{ kNm} - 200 \text{ kNm} - 80 \text{ kNm} - 330.625 \text{ kNm} \Rightarrow$$

$$\underline{M_{\max} = +50.625 \text{ kNm}}$$

(β) Η μέγιστη ροπή υπολογίζεται από το εμβαδόν του διαγράμματος της τέμνουσας:

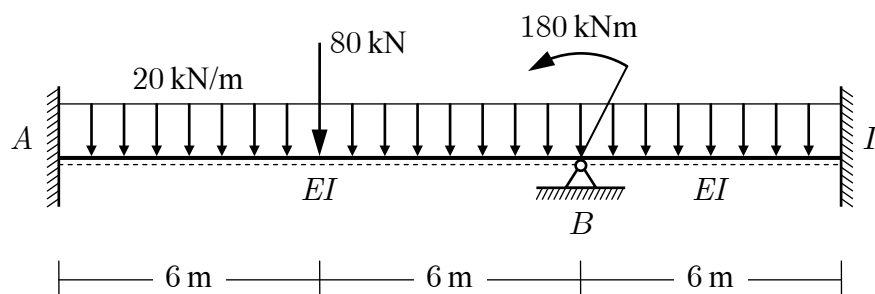
$$M_{\max} \text{ από εμβαδόν } Q \text{ } \Gamma \quad M_{\max} = -280 \text{ kNm} + \frac{5.75 \text{ m}}{2} \cdot 115 \text{ kN} \Rightarrow$$

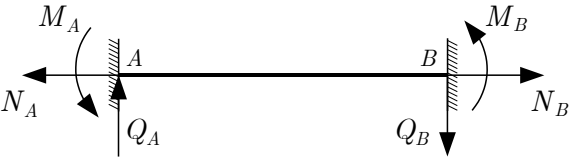
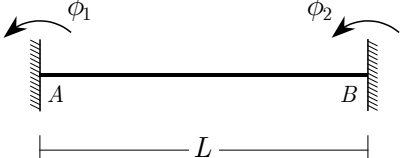
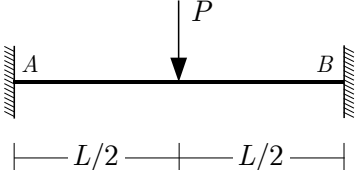
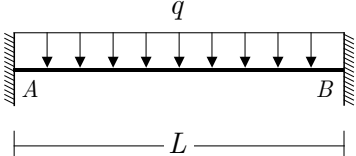
$$\underline{M_{\max} = +50.625 \text{ kNm}}$$

ΘΕΜΑ 2° (35%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A , B και Γ .
- Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A , B και Γ του φορέα.
- Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΑΜΦΙΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{PL}{8}, \quad M_B = -\frac{PL}{8}$ $Q_A = \frac{P}{2}, \quad Q_B = -\frac{P}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$

Επίλυση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο B.

Δοκός AB:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{12}\phi + \frac{20 \cdot 12^2}{12} + \frac{80 \cdot 12}{8} \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI\phi}{6} + 360$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{12}\phi - \frac{20 \cdot 12^2}{12} - \frac{80 \cdot 12}{8} \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI\phi}{3} - 360$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{12^2}\phi + \frac{20 \cdot 12}{2} + \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{AB} = \frac{EI\phi}{24} + 160$$

$$Q_{BA} = \frac{6EI}{12^2}\phi - \frac{20 \cdot 12}{2} - \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{BA} = \frac{EI\phi}{24} - 160$$

Δοκός BΓ:

$$M_{B\Gamma} = \frac{4EI}{6}\phi + \frac{20 \cdot 6^2}{12} \Rightarrow M_{B\Gamma} = \frac{2EI\phi}{3} + 60$$

$$M_{\Gamma B} = \frac{2EI}{6}\phi - \frac{20 \cdot 6^2}{12} \Rightarrow M_{\Gamma B} = \frac{EI\phi}{3} - 60$$

$$Q_{BG} = \frac{6EI}{6^2} \phi + \frac{20 \cdot 6}{2} \Rightarrow Q_{BG} = \frac{EI\phi}{6} + 60$$

$$Q_{GB} = \frac{6EI}{6^2} \phi - \frac{20 \cdot 6}{2} \Rightarrow Q_{GB} = \frac{EI\phi}{6} - 60$$

Ισοροπία κόμβου B:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_{BA} + M_{BG} - 180 = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{3} - 360 \right) + \left(\frac{2EI\phi}{3} + 60 \right) - 180 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{EI\phi = 480} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q_{BA} + B_y - Q_{BG} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{24} - 160 \right) + B_y - \left(\frac{EI\phi}{6} + 60 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B_y = 280 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Κόμβος A:

$$A_y = Q_{AB} \Rightarrow A_y = \frac{EI\phi}{24} + 160 \Rightarrow \boxed{A_y = 180 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{AB} \Rightarrow M_A = \frac{EI\phi}{6} + 360 \Rightarrow \boxed{M_A = 440 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

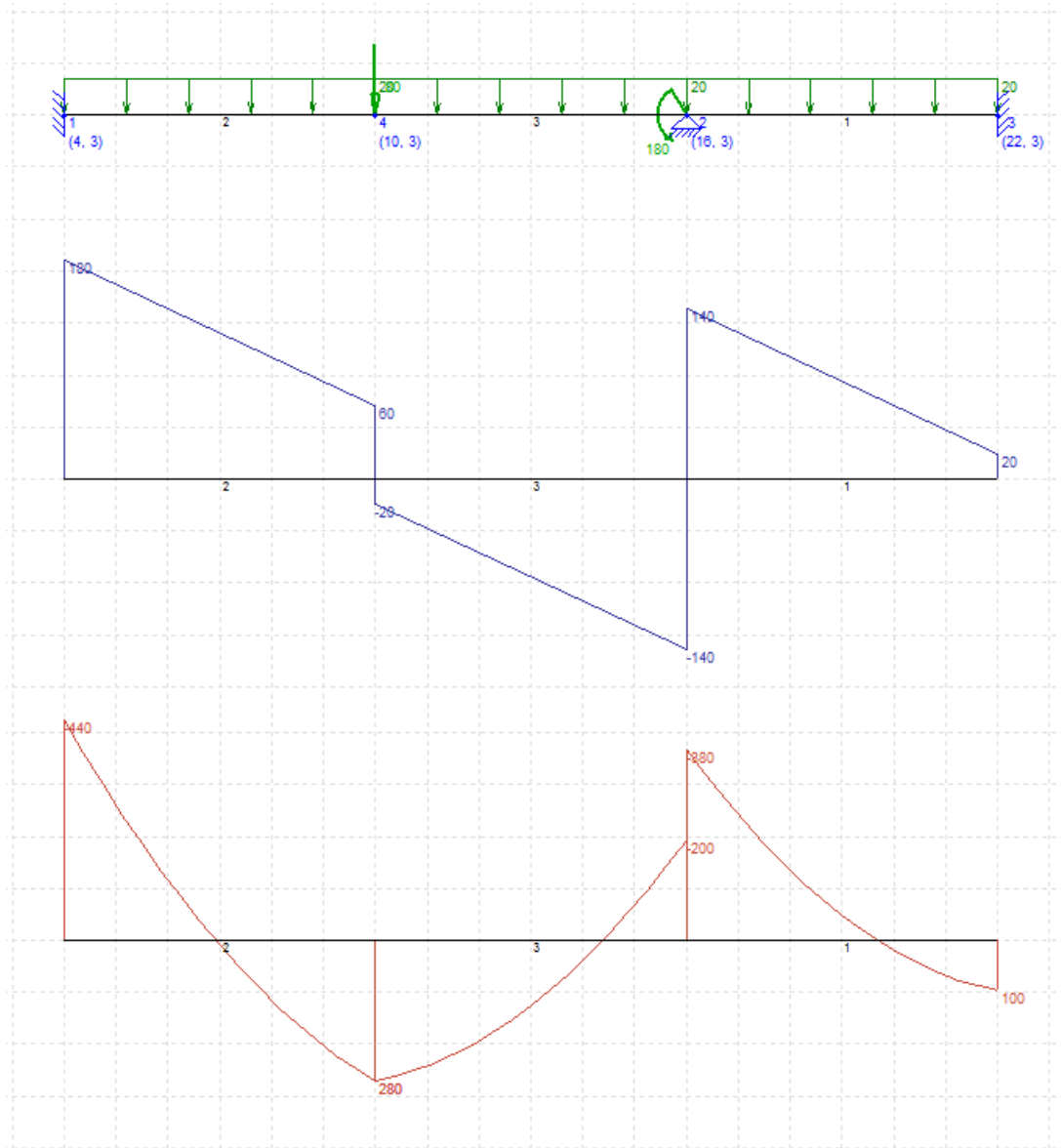
Κόμβος Γ:

$$\Gamma_y = -Q_{GB} \Rightarrow \Gamma_y = -\left(\frac{EI\phi}{6} - 60 \right) \Rightarrow \boxed{\Gamma_y = -20 \text{ kN}}$$

$$M_\Gamma = M_{GB} \Rightarrow M_\Gamma = \frac{EI\phi}{3} - 60 \Rightarrow \boxed{M_\Gamma = 100 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Ισοροπία πλαισίου: (έλεγχος ή εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού B_y)

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow A_y + B_y + \Gamma_y - 20 \cdot 18 - 80 = 180 + B_y - 20 - 360 - 80 = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B_y = 280 \text{ kN}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Διάγραμμα Καμπτικών Ροπών:Υπολογισμός Μέγιστης Καμπτικής Ροπής

Η πρώτη μέγιστη θετική ροπή εμφανίζεται δεξιά της πάκτωσης στο σημείο που εφαρμόζεται η δύναμη των 80 kN με τιμή $M_{\max} = +280 \text{ kNm}$, ενώ η δεύτερη εμφανίζεται στην πάκτωση Γ με τιμή $M_{\max} = +100 \text{ kNm}$.

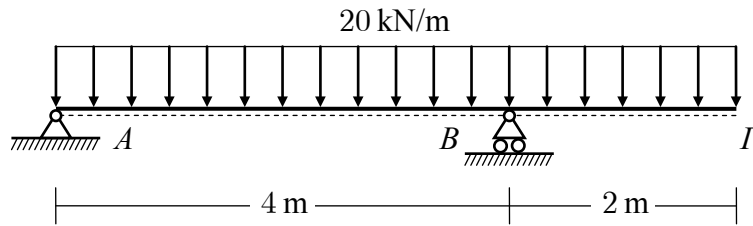
(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

ΘΕΜΑ 3° (30%)

(A' επιλογή)

Για την μονοπροέχουσα δοκό του παρακάτω σχήματος ζητούνται η βύθιση w στο άκρο Γ του προβόλου και η στροφή ϕ στη στήριξη B . Δίνεται $EI = 20000 \text{ kNm}^2$ και οι σχέσεις υπολογισμού των παραμορφώσεων:

$$w \cdot 1 \text{ kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx \quad \text{και} \quad \phi \cdot 1 \text{ kNm} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$



Οι πίνακες με τους πολλαπλασιασμούς διαγραμμάτων δίνονται στην επόμενη σελίδα.

Τιμές ολοκληρωμάτων $\int_0^\ell M_j M_k dx$			
$\int_0^\ell M_j M_k dx$			
	ℓjk	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{2} jk$
	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{3} jk$	$\ell \frac{1}{6} jk$
	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{6} jk$	$\ell \frac{1}{3} jk$
 τετραγ. παραβολή	$\ell \frac{1}{6} k (j_1 + 4j_2 + j_3)$	$\ell \frac{1}{6} k (2j_2 + j_3)$	$\ell \frac{1}{6} k (j_1 + 2j_2)$

(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

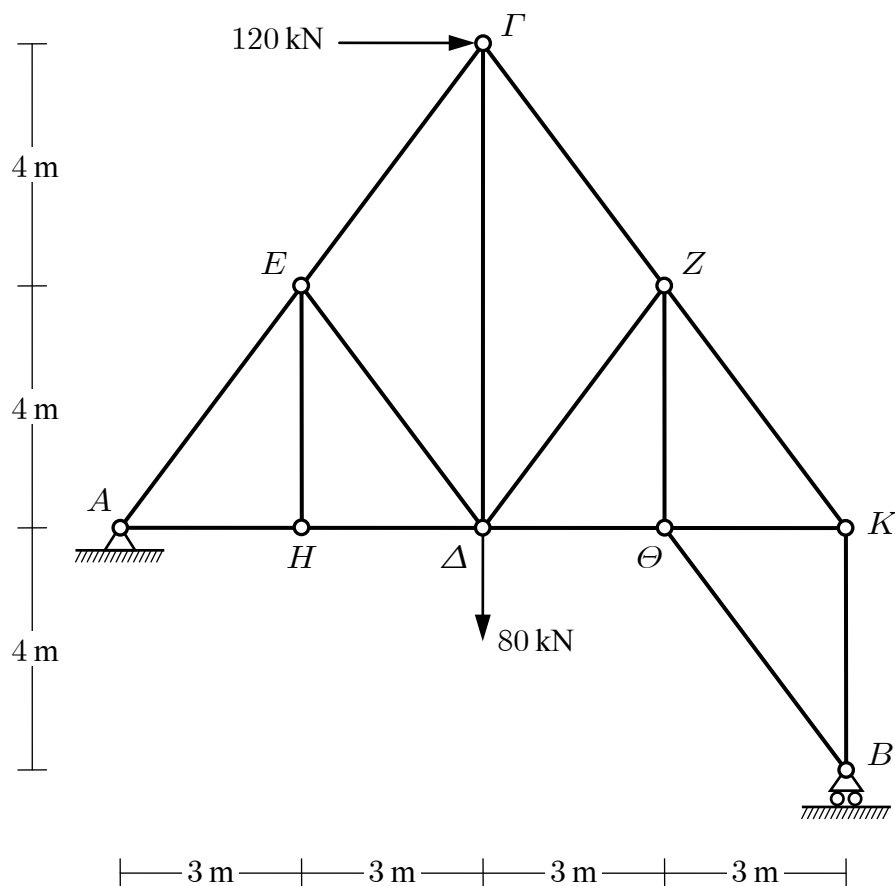
ΘΕΜΑ 3^ο (30%)

(B' επιλογή)

Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- Να προσδιορισθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη.
- Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των τομών οι δυνάμεις στα μέλη ΔZ , $\Delta \Theta$ και ΓZ .
- Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στις ράβδους AE , AH , EH , $E\Delta$ και $E\Gamma$.

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Επίλυση:

